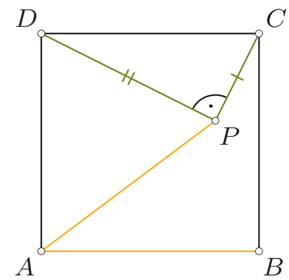
# XI Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów (2015/16)

**Zadania konkursowe zawodów pierwszego stopnia — część korespondencyjna**

**(1 września – 12 października 2015 r.)**

**1.** Wykaż, że istnieje nieskończenie wiele trójek $(x,y,z)$ dodatnich liczb całkowitych spełniających równanie
$$x(y-z)+y(z-x)=6\,.$$

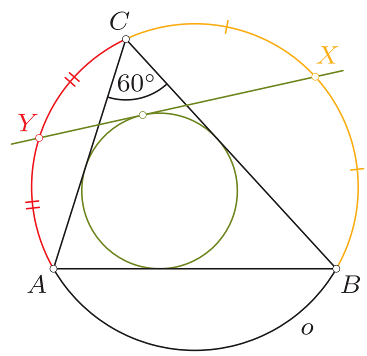
**2.** Wewnątrz kwadratu $ABCD$ wybrano taki punkt $P$, że
$$AP=AB \quad \text{oraz} \quad \sphericalangle CPD=90^\circ\,.$$
Wykaż, że $DP=2\cdot CP$.




Zadanie 2

**3.** Wyznacz wszystkie liczby naturalne $n$, dla których liczba
$$\frac{n^4+4}{17}$$
jest pierwsza.

**4.** Dany jest trójkąt $ABC$, w którym $\sphericalangle ACB=60^\circ$. Na trójkącie tym opisano okrąg $o$. Punkt $X$ jest środkiem tego łuku $BC$ okręgu $o$, który nie zawiera punktu $A$, a punkt $Y$ jest środkiem tego łuku $CA$ okręgu $o$, który nie zawiera punktu $B$. Udowodnij, że prosta $XY$ jest styczna do okręgu wpisanego w trójkąt $ABC$.




Zadanie 4

**5.** W wierzchołkach $n$-kąta foremnego rozmieszczono liczby $1,2,\ldots,n$ w taki sposób, że suma liczb znajdujących się w każdych trzech kolejnych wierzchołkach $n$-kąta jest parzysta. Wyznacz wszystkie liczby naturalne $n\geqslant 3$, dla których takie rozmieszczenie jest możliwe.

**6.** Różne liczby pierwsze nieparzyste $p$ i $q$ mają tę własność, że liczba $p^2+p$ jest podzielna przez $q^2+q$. Udowodnij, że liczba $\frac{1}{2}(p-q)$ jest złożona.

**7.** Czy istnieje taki ostrosłup $ABCDS$, którego podstawą jest prostokąt $ABCD$ i którego każde dwie krawędzie boczne są różnych długości, a ponadto spełniona jest równość $AS+CS=BS+DS$? Odpowiedź uzasadnij.

Rozwiązania powyższych zadań (wszystkich lub części z nich) należy przekazać szkolnemu koordynatorowi OMG lub przesłać bezpośrednio, listem poleconym, do Komitetu Okręgowego OMG właściwego terytorialnie dla szkoły, najpóźniej dnia

**12 października 2015 r. (decyduje data stempla pocztowego).**

Rozwiązania przesłane w terminie późniejszym lub pod niewłaściwy adres nie będą rozpatrywane. Adresy Komitetów Okręgowych OMG, szczegółowe wytyczne dotyczące sposobu redakcji rozwiązań i przesyłania prac, a także regulamin OMG i inne bieżące informacje znajdują się na stronie internetowej Olimpiady: `www.omg.edu.pl`.

Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej. Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku.

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

Fundacja